ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION P')
DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1977
(DURÉE : 4 heures)

Correction

Partie I

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{\alpha,t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

- Si $t<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{\alpha,t}(x)=+\infty$, et donc $f_{\alpha,t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Si $t>0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{\alpha,t}=0$, donc $f_{\alpha,t}(x)=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc $f_{\alpha,t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Si $t=0$, $f_{\alpha,0}(x)=\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}\simeq\dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ au voisinage de $+\infty$, donc $f_{\alpha,0}$ est intégrable si, et seulement si, $\alpha\in[0,1[$.

En conclusion, $f_{\alpha,t}$ est intégrable si, et seulement si, $(\alpha,t)\in C=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_+^*\cup[0,1[\times\{0\}$

2. (a) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange d'ordre 1 à la fonction $\exp$ sur le segment I d'extrémités 0 et n'importe quel réel u. On a donc :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \ |e^u-1-u|\le\frac{u^2}{2}\max_{t\in I}|\exp(u)|.$$

Mais, par croissance et positivité, on a :

$$\max_{t\in I}|\exp(t)|=\begin{cases} e^u & \text{si } u\ge 0\\ 1 & \text{si } u<0\end{cases}.$$

Donc dans tous les cas $\max\limits_{t\in I}|\exp(t)|\le e^{|u|}$. D'où l'inégalité :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \ |e^u-1-u|\le\frac{u^2}{2}e^{|u|}.$$

Nous en déduisons, en particulier, que pour tout $x\ge0$ et $|h|\le\dfrac{t_0}{2}$ on a :

$$|e^{-hx}-1+hx|\le\frac{h^2x^2}{2}e^{|hx|}\le\frac{h^2x^2}{2}e^{\frac{xt_0}{2}}.$$

On multiplie ensuite par le réel positif $\dfrac{x^\alpha e^{-t_0x}}{1+x^2}$ pour déduire :

$$\left|\frac{x^\alpha e^{-(h+t_0)x}}{1+x^2}-\frac{x^\alpha e^{-t_0x}}{1+x^2}+h\frac{x^{\alpha+1}e^{-t_0x}}{1+x^2}\right|\le\frac{h^2}{2}\frac{x^{\alpha+2}e^{\frac{-xt_0}{2}}}{1+x^2},$$

où chacune des fonctions intervenant dans cette inégalité sont intégrables sur $[0,+\infty[$ (la question précédente). L'inégalité triangulaire intégrale et réduction au même dénominateur conduisent alors à :

$$\left|\frac{\Phi_\alpha(t_0+h)-\Phi_\alpha(t_0)}{h}+\Phi_{\alpha+1}(t_0)\right|\le\frac{|h|}{2}\Phi_{\alpha+2}\left(\frac{t_0}{2}\right).$$

(b) La question précédente montre que Φ_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t>0$,

$$\Phi'_\alpha(t) = -\Phi_{\alpha+1}(t).$$

Cette égalité permet de montrer par récurrence que Φ_α est de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall t>0,\ \ \Phi_\alpha^{(k)} = (-1)^k \Phi_{\alpha+k}(t).$$

En particulier,

$$\forall t>0,\ \ \Phi_0(t)+\Phi''_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}x = \frac{1}{t}.$$

3. D'autre part, on a $0 \leq f_{0,t}(x) = \dfrac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq e^{-tx}$, donc $0 \leq \Phi_0(t) \leq \dfrac{1}{t}$. Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi_0(t) = 0$.

4. $\phi - \Phi_0$ est solution de l'équation $y''+y=0$, donc $\phi-\Phi$ est 2π-périodique et tend vers 0 à l'infini, donc $\phi-\Phi$ est nulle et donc $\phi = \Phi_0$.

Partie II

1. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_u^X \frac{\sin(x-v)}{x}\mathrm{d}x &= \left[\frac{-\cos(x-v)}{x}\right]_u^X - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos(u-v)}{x} - \frac{\cos(X-v)}{X} - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a $\left|\dfrac{\cos(x-v)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2}\mathrm{d}x$ existe, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(X-v)}{X} = 0$, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_u^{+\infty} \frac{\sin(x-v)}{x}\mathrm{d}x$ existe et vaut

$$\frac{\cos(u-v)}{x} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

2. (a) Soient $s>$ et $h\in\mathbb{R}$ tels que $s+h>0$, on a :

$$\begin{aligned}
R(s+h)-R(s) &= \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y)\mathrm{d}y - \int_s^{+\infty} \rho(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y)\mathrm{d}y + \int_{s+h}^{s} \rho(y)\mathrm{d}y - \int_{s+h}^{+\infty} \rho(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{s+h}^{s} \rho(y)\mathrm{d}y = F(s)-F(s+h)\ \text{ où } F \text{ est une primitive de } \rho
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{R(s+h)-R(s)}{h} = -\lim_{h\to0}\frac{F(s+h)-F(s)}{h} = -\rho(s)$, donc R est dérivable (et même de classe $\mathscr{C}^1$ car ρ est continue) sur $]0,+\infty[$ et $R' = -\rho$.

(b) D'après la définition de f on a :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2}\mathrm{d}x \overset{u=x-t}{=} \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{(u+t)^2}\mathrm{d}u.$$

Et on a aussi

$$f(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x}\mathrm{d}x = \cos t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \sin t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x.$$

Les fonctions $t \mapsto \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ et $t \mapsto \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ sont des primitives de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, donc sont elles-mêmes de classe $\mathscr{C}^\infty$, de même que les fonctions $\cos$ et $\sin$. On en déduit que f est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour tout $t>0$, on a :

$$f'(t) = -\sin t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x - \cos t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x.$$

et

$$f''(t) = -\cos t \int_t^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \frac{\sin^2 t}{t} + \sin t \int_t^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x + \frac{\cos^2 t}{t} = -f(t) + \frac{1}{t}.$$

On a, pour $t>0$, $\left|\dfrac{\cos x}{(t+x)^2}\right| \leq \dfrac{1}{(t+x)^2}$, donc on peut déduire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(t+x)^2}\mathrm{d}x = 0$, en conséquence $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

3. (a) Soit $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $[0,+\infty[$ (se prolonge par continuité en 0). À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x g(t)\mathrm{d}t = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

D'une part, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$.
D'autre part, $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, car $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \int_{[1,+\infty[} \frac{\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) Soit $t>0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x+t}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_0^{+\infty} \sin x \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&= t\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq t\left(\left|\int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+t)x}\mathrm{d}x\right|\right) \\
&\leq t\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+t} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = t\left(1 + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)
\end{aligned}$$

Le terme à droite tend vers 0 quand t tend vers 0, d'où, en tenant compte de la question 3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{t\to0} f(t) = \lim_{t\to0} \Phi_0(t) = \Phi_0(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

4. D'abord par une intégration parties, on a les relations :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

et

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

Par linéarisation $\sin^4 x=\dfrac{1}{8}\dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(2x)-1}{x^2}$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(4x)}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\sin^4 x}{3x^3}\right]_0^{+\infty}+\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x^3}\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3}\left(\left[-\frac{\sin^3 x\cos x}{2x^2}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{3\sin^2 x(1-\sin^2 x)-\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx-\frac{8}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= 2\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Partie III

1. Les deux intégrales sont absolument convergentes, donc sont convergentes.

2. (a) Par des intégration par parties et des changements de variables, on a : On a

$$\begin{aligned}G(t) &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\sin(tx)\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2})\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{u\sin u}{u^2+t^2})\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{2}+\int_0^{+\infty}(\cos u)'\frac{u}{u^2+t^2})\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{2}+\left[\frac{u\cos u}{u^2+t^2}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\cos u\left(\frac{u}{u^2+t^2}\right)'\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2}\cos u\mathrm{d}u\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2}\cos u\mathrm{d}u\right|\le\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+t^2}=\frac{\pi}{2t}$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}G(t)=\frac{\pi}{2}$.

(b) Le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, montre que l'application

$$t\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{t^2-u^2}{(u^2+t^2)^2}\cos u\mathrm{d}u$$

est continue sur $\mathbb{R}$, elle est de même de la fonction G, et comme $G(t)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand $|t|$ tend vers $+\infty$, alors G est bornée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, on a :

$$|G(u) - G(v)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ux) - \sin(vx)}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{x|u-v|}{x(1+x^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}|u-v|.$$

• • • • • • • • • • •